**1.**

**Приближенные числа.**

**Значащие цифры**

Если абсолютная погрешность величины *a* не превышает одной единицы разряда последней цифры числа *a*, то говорят, что у числа все знаки верные.

Приближенные числа следует записывать, сохраняя только верные знаки. Если, например, абсолютная погрешность числа 52400 равна 100, то это число должно быть записано, например, в виде 524 .102или 0,524 .105. Оценить погрешность приближенного числа можно, указав, сколько верных значащих цифр оно содержит. При подсчете значащих цифр не считаются нули с левой стороны числа.

Примеры:

|  |  |
| --- | --- |
|  | 1 куб.фут = 0.0283 м3 - три верных значащих цифры |
|  | 1 дюйм = 2,5400 v пять верных значащих цифр. |

Если число *a*имеет*n*верных значащих цифр, то его относительная погрешность *da* T 1/(*z*\**dn*-1), где *z* - первая значащая цифра числa*a; d -* основание системы счисления.

У числа*a* с относительной погрешностью*da* верны*n* значащих цифр, где *n -* наибольшее целое число, удовлетворяющее неравенству (1+*Z*)*da* T *dl-n*.

Пример:

Если число *a* = 47,542 получено в результате действий над приближенными числами и известно, что *da* = 0,1%, то a имеет 3 верных знака, так как (4+1)0,001 T 10v2*.*

**Округление**

Если приближенное число содержит лишние (или неверные) знаки, то его следует округлить. При округлении сохраняются только верные знаки; лишние знаки отбрасываются, причем если первая отбрасываемая цифра больше или равна*d*/2, то последняя сохраняемая цифра увеличивается на единицу. При округлении возникает дополнительная погрешность, не превышающая половины единицы разряда последней значащей цифры округленного числа. Поэтому, чтобы после округления все знаки были верны, погрешность до округления должна быть не больше половины единицы того разряда, до которого предполагают делать округление.

**Действия над приближенными числами**

Результат действий над приближёнными числами представляет собой также приближённое число. Погрешность результата может быть выражена через погрешности первоначальных данных при помощи следующих теорем:

1. Предельная абсолютная погрешность алгебраической суммы равна сумме предельных абсолютных погрешностей слагаемых.
2. Относительная погрешность суммы заключена между наибольшей и наименьшей из относительных погрешностей слагаемых.
3. Относительная погрешность произведения или частного равна сумме относительных погрешностей сомножителей или, соответственно, делимого и делителя.
4. Относительная погрешность n-ой степени приближенного числа в n раз больше относительной погрешности основания (как у целых, так и для дробных n).

**2.**

**Основы теории погрешностей.**

Мерой точности приближенных чисел является погрешность. Различают два вида погрешностей: абсолютную и относительную. Абсолютная погрешность некоторого числа равна разности между его истинным значением и приближенным значением, полученным в результате вычислений. Относительная погрешность – отношение точного значения к приближенному значению.

∆x=x-a (абсолютная).

бх= (относительная).

Максимальное значение абсолютной и относительной погрешности называют предельной абсолютной и предельной относительной погрешностью соответственно. На практике, если нет специальной договоренности, абсолютная погрешность числа считается равно1 единице последнего разряда.

**Источники погрешности.**

 Источники погрешностей:

1. Неточное изображение реальных процессов с помощью математики.

2. Приближенные значения некоторых величин, участвующих в решении задач (π=3,14154; e=2,7218).

3. Замена бесконечных процессов конечными.

4. Округление исходных данных, промежуточных и конечных результатов.

5. Результат действия над приближенными числами.

Математическая модель для определенного процесса может внести существенные погрешности, если в ней не учтены какие-либо важные черты рассматриваемой задачи. В частности мат. модель может прекрасно работать в одних условиях и быть неприемлемой в других. Поэтому важно учитывать её особенности. Исходные данные в задаче – основной источник погрешности. Вместе с погрешностями, вносимыми мат. моделью они определяют неустранимые погрешности, т.к. они не могут быть уменьшены ни до начала решения, ни в процессе. Численный метод так же является источником погрешности. Это связано с заменой интеграла интегральной суммой, усечением рядов, интерполированием табличных данных и т.д. При вычислениях с помощью компьютера неизбежны погрешности округлений в связи с ограниченностью разрядной сетки.

**Уменьшение погрешности.**

Как правило, погрешность численного метода регулируема, т.е. теоретически она может быть уменьшена путём изменения некоторого параметра (шага интегрирования, числа члена усеченного ряда и т.д.). Для уменьшения погрешности округлений в связи с ограниченностью разрядной сетки можно использовать систему с более расширенной разрядной сеткой.

**5. Метод половинного деления**

|  |  |
| --- | --- |
| Дано нелинейное уравнение: f(x)=0. | (4.1) |

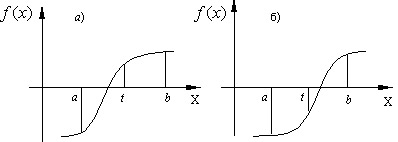
Найти корень уравнения, принадлежащий интервалу [a,b], с заданной точностью ξ.

Для уточнения корня *методом половинного деления* последовательно осуществляем следующие операции:

1. Делим интервал пополам:

t – координаты середины отрезка [a,b]

1. В качестве нового интервала изоляции принимаем ту половину интервала, на концах которого функция имеет разные знаки



Для этого:

a) Вычисляем значение функции f(x) в точках a и t.

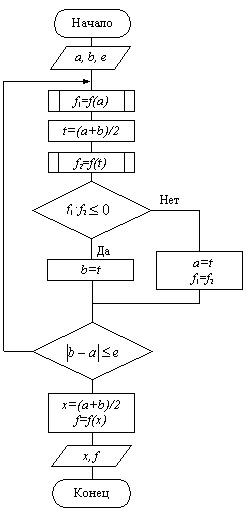
b) Проверяем: если f(a)f(t) < 0, то корень находится в левой половине интервала [a,b] (Рисунок а). Тогда отбрасываем правую половину интервала и делаем переприсвоение b=t.

c) Если f(a)f(t) < 0 не выполняется, то корень находится в правой половине интервала [a,b] (Рисунок б). Тогда отбрасываем левую половину и делаем переприсвоение a=t. В обоих случаях мы получим новый интервал [a,b] в 2 раза меньший предыдущего.

1. Процесс, начиная с пункта 1, циклически повторяем до тех пор, пока длина интервала [a,b] не станет равной либо меньшей заданной точности, т.е.

|b-a|≤ ξ

**Схема алгоритма уточнения корней по *методу половинного деления*:**



**Оценка погрешности:**После n делений, очевидно, что погрешность можно оценить следующим образом:|ksi - xn|<=(b-a)/2^n, так как она при каждом последующем делении уменьшается на 2, то |ksi-x{n+1}|<=0.5*|ksi-xn|, поэтому α=1, а c=0,5 (скорость сходимости), где ξ – точное значение функции.

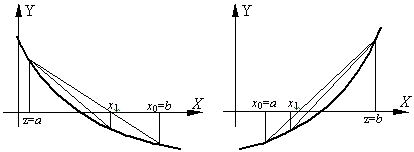
**6.** Метод хорд

Метод основан на замене функции f(x) на каждом шаге поиска хордой, пересечение которой с осью Х дает приближение корня.

При этом в процессе поиска семейство хорд может строиться:

а) при фиксированном левом конце хорд, т.е. z=a, тогда начальная точка х0=b [(рис. 4.10а)](http://www.intuit.ru/department/calculate/intromathmodel/4/intromathmodel_4.html#image.4.10);

б) при фиксированном правом конце хорд, т.е. z=b, тогда начальная точка х0=a [(рис. 4.10б)](http://www.intuit.ru/department/calculate/intromathmodel/4/intromathmodel_4.html#image.4.10);



**Рис. 4.10.**

В результате итерационный процесс схождения к корню реализуется рекуррентной формулой:

для случая а)

|  |  |
| --- | --- |
| x_{n+1}=x_n - \frac{f(x_n)}{f(x_n)-f(a)} (x_n - a); | (4.11) |

для случая б)

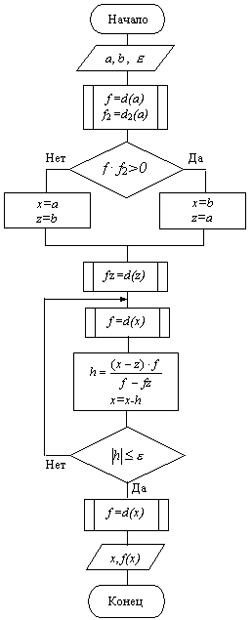
|  |  |
| --- | --- |
| x_{n+1}=x_n - \frac{f(x_n)}{f(x_n)-f(b)} (x_n - b); | (4.12) |

Процесс поиска продолжается до тех пор, пока не выполнится условие

|  |  |
| --- | --- |
| \lvert x_{n+1}–x_n\rvert \le \text{ или } \lvert h\rvert \le \varepsilon. | (4.13) |

Метод обеспечивает быструю сходимость, если f(z)f"(z) > 0, т.е. хорды фиксируются в том конце интервала [a,b], где знаки функции f(z) и ее кривизны f"(z) совпадают.

Схема алгоритма уточнения корня *методом хорд* представлена на [рис. 4.11.](http://www.intuit.ru/department/calculate/intromathmodel/4/intromathmodel_4.html#image.4.11)



**Рис. 4.11.**  Схема алгоритма уточнения корня методом хорд

**7.** Метод Ньютона (метод касательных)

Рассмотренные ранее методы решения нелинейных уравнений являются методами прямого поиска. В них для нахождения корня используется нахождение значения функции в различных точках интервала [a,b].

*Метод Ньютона* относится к градиентным методам, в которых для нахождения корня используется значение производной.

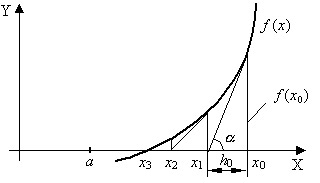
Дано нелинейное уравнение:

f(x)=0

Найти корень на интервале [a,b] с точностью \varepsilon.

*Метод Ньютона* основан на замене исходной функции f(x), на каждом шаге поиска касательной, проведенной к этой функции. Пересечение касательной с осью Х дает приближение корня [(Рис. 4.8)](http://www.intuit.ru/department/calculate/intromathmodel/4/intromathmodel_4.html#image.4.8).

Выберем начальную точку x0=b (конец интервала изоляции). Находим значение функции в этой точке и проводим к ней касательную, пересечение которой с осью Х дает нам первое приближение корня x1.



**Рис. 4.8.**

x1 = x0 – h0,

где

h_0= \frac{f(x_0)}{\tg(\alpha)}= \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}. 

Поэтому

 x_1=x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.

В результате итерационный процесс схождения к корню реализуется рекуррентной формулой

|  |  |
| --- | --- |
| x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} | (4.6) |

Процесс поиска продолжаем до тех пор, пока не выполнится условие:

|  |  |
| --- | --- |
| \lvert x_{n+1}-x_n \rvert \le \varepsilon | (4.7) |

Упростим условие (4.7), исходя из (4.6). Получим:

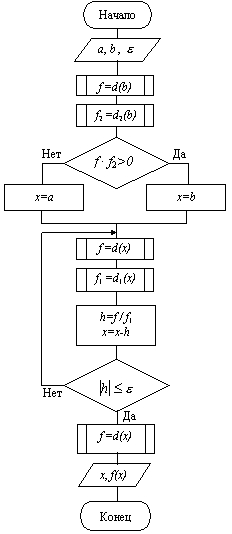
|  |  |
| --- | --- |
| \lvert \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\rvert \le\varepsilon. | (4.8) |

Метод обеспечивает быструю сходимость, если выполняется условие:

|  |  |
| --- | --- |
| f(x_0)\cdot f''(x_0) > 0, | (4.9) |

т.е. первую касательную рекомендуется проводить в той точке интервала [a,b], где знаки функции f(x0) и ее кривизны f"(x0) совпадают.

Схема алгоритма уточнения корня *метод Ньютона* приведена на [рис. 4.9](http://www.intuit.ru/department/calculate/intromathmodel/4/intromathmodel_4.html#image.4.9)

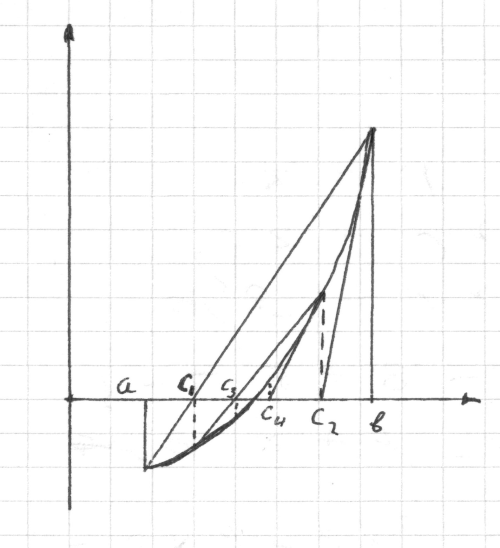


**Рис. 4.9.**  Схема алгоритма уточнения корня методом Ньютона

**8. Комбинированный метод.**

пусть корень уравнения  определённой на отрезке ,  точность.

В процессе построения итерационной последовательности, сходящейся к значению корня, можно комбинировать нек. методы, ускоряя тем самым сходимость итерационного процесса.

Если заметить, что метод хорд и касательной даёт приближение к корню с разных концов отрезка, то можно скомбинировать эти методы.

;

;

;

;

;

.

Заметим, что в комбинированном методе точное значение корня всегда находится между двумя соседними приближениями. Процесс вычислений заканчиваем когда расстояние между двумя соседними приближениями меньше.

в этом случае за корень можно принять любую точку из 

**9. Численные методы решения систем линейных уравнений. метод последовательного исключения неизвестных.**

Будем рассматривать только те СЛАУ, которые имеют единственное решение.



метод последовательного исключения неизвестных с выбором главного элемента заключается в том, что матрица коэффициентов при х приводится к треугольному виду, по главной диагонали все элементы 1, ниже – нули.

**Предположим, что (важно)**

разделим первую строку на коэффициент при 



;

;

;



деление повторять до:



;

;

;

;

**10. Численные методы решения систем линейных уравнений. метод квадратных корней.**

Если матрица коэффициентов при неизвестных СЛАУ симметрическая, то метод Гаусса значительно упрощается().

Пусть дана система уравнений , где *A* может быть представлена в виде двух треуг транспонир. матриц где Т-верхняя, а - нижняя треуг матрицы.



Тогда система принемает следующий вид , где 



Решение исходной системы последовательно сходится к послед решению  и 

=

;

;

;

; и тд



;

;

выражаем ;

;

выражаем ;



;

;

;



; 

**11. Численные методы интерполирования функций. Постановка задачи. Вторая формула Ньютона для равноотстоящих узлов.**

При решении многих задач, используются функции, заданные таблично. Необходимо для дальнейшего исследования представить табличную функцию в виде аналитической, то есть перевести дискретно заданную задачу…

Существуют различные способы получения таких функций. Один из них интерполирование. В общем виде, задачи интерполирования формулируются так: пусть в *n+1*-й точке *x0,x1­,…,xn,* даны значения функции *y=f(x). y0,y1,…,yn.* Каждое *yi=f(xi).*

Требуется подобрать достаточно простую функцию , удовлетворяющую следующим условиям:

1. В точке *x0,x1­,…,xn,* значения функции , должны совпадать со значениями данной функции: , k=0,1,…,n.
2. Во всех остальных точках из области определения, выполняется приближенное равенство:

.

Функция называется интерполирующей, процесс ее построения - интерполированием, точки

*x0,x1­,…,xn* - узлами интерполирования. Интерполирующая функция подбирается из определенного класса функций. Часто в качестве такой функции берется многочлен n-й степени, процесс построения такого многочлена - параболическое интерполирование.

Вторая формула Ньютона. Пусть функция *f(x)* задана в *(n+1)* разноотстоящем узле интерполирования. Вторым интерполяционным многочлена Ньютона называется многочлен вида:

На практике удобней пользоваться другой формулой:

Обозначим , тогда =t+1 , = t+2…=t+n-1, тогда многочлен примет вид:

.

**12. Постановка задачи численного интегрирования. Формулы прямоугольников.**

При решении многих задач, в физике, технике и т.д., возникает необходимость вычисления определенных интегралов. Пусть требуется вычислить интеграл. Если для подынтегральной функции *f(x)* найдена первообразная *F(x),* то интеграл можно вычислить по формуле Ньютона-Лейбница:.

Однако, часто не бывает возможности использовать эту формулу, например, в следующих случаях:

1. Если первообразная функция F(x) не выражается в конечном виде через элементарные функции, так называемые неберущиеся интегралы:

http://www.pm298.ru/Math/f3009.jpg http://www.pm298.ru/Math/f3012.jpg

1. Если первообразная функция F(x) имеет настолько сложную аналитическую запись, что ее использование не целесообразно.
2. Если подынтегральная функция f(x) задана графически или таблично.

Во всех этих случаях возникает необходимость разработки методов, позволяющих вычислять определенные интегралы приближенно. Эти формулы для вычисления приближенных интегралов называются квадраторными.

Вывод формул прямоугольников основан на замене определенного интеграла интегральной суммы. Из курса мат анализа известно, что , где - интегральная сумма для функции f(x) на промежутке [a;b]. Точка - производная точка, принадлежащая отрезку .

a b

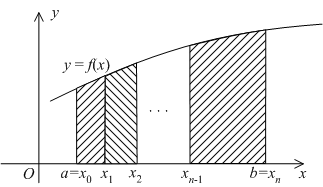
Если отрезок [a;b] разбить на n - равных частей, тогда любое . В этом случае, h - шаг квадратурной формулы, при этом условии, .

Если в качестве точек взять левые концы частичных отрезков, то есть , где , то получим:

Эта формула называется формулой левых прямоугольников.

Если в качестве точек взять правые концы частичных отрезков, то получим частичный интеграл.

- формулу правых прямоугольников.

****

Очевидно, что формула прямоугольников тем точнее, чем больше H.

Абсолютная погрешность формулы прямоугольников оценивается следующем образом: где

.

**13. Постановка задачи численного интегрирования. Формулы трапеций.**

При решении многих задач, в физике, технике и т.д., возникает необходимость вычисления определенных интегралов. Пусть требуется вычислить интеграл. Если для подынтегральной функции *f(x)* найдена первообразная *F(x),* то интеграл можно вычислить по формуле Ньютона-Лейбница:.

Однако, часто не бывает возможности использовать эту формулу, например, в следующих случаях:

1. Если первообразная функция F(x) не выражается в конечном виде через элементарные функции, так называемые неберущиеся интегралы:

http://www.pm298.ru/Math/f3009.jpg http://www.pm298.ru/Math/f3012.jpg

1. Если первообразная функция F(x) имеет настолько сложную аналитическую запись, что ее использование не целесообразно.
2. Если подынтегральная функция f(x) задана графически или таблично.

Во всех этих случаях возникает необходимость разработки методов, позволяющих вычислять определенные интегралы приближенно. Эти формулы для вычисления приближенных интегралов называются квадраторными.

**Формулы трапеций:**

Пусть требуется вычислить интеграл . Обозначим . Произведем замену подынтегральной функции f(x) по формуле линейного интерполирования: .

В этом случае, . При этом получим: .

, тогда при , t=0; x=, t=1, тогда

.

Полученная формула называется формулой трапеции.

**Геометрический смысл формулы трапеции** заключается в том, что на промежутке [a;b], криволинейная трапеция заменяется прямолинейной трапецией в следствии замены подынтегральной функции отрезком прямой по формуле линейного интерполирования. Для более точного вычисления определенного интеграла разбивают отрезок [a;b] на n - равных частей точками и применяют формулу трапеции на каждом из частичных отрезков, то есть интеграл

Суммируя левые и правые части приближенных равенств, получаем:

- обобщенная формула трапеции.

Абсолютная погрешность формулы трапеций оценивается следующем образом: , где

.

**14. Постановка задачи численного интегрирования. Формула Симпсона.**

При решении многих задач, в физике, технике и т.д., возникает необходимость вычисления определенных интегралов. Пусть требуется вычислить интеграл. Если для подынтегральной функции *f(x)* найдена первообразная *F(x),* то интеграл можно вычислить по формуле Ньютона-Лейбница:.

Однако, часто не бывает возможности использовать эту формулу, например, в следующих случаях:

1. Если первообразная функция F(x) не выражается в конечном виде через элементарные функции, так называемые неберущиеся интегралы:

http://www.pm298.ru/Math/f3009.jpg http://www.pm298.ru/Math/f3012.jpg

1. Если первообразная функция F(x) имеет настолько сложную аналитическую запись, что ее использование не целесообразно.
2. Если подынтегральная функция f(x) задана графически или таблично.

Во всех этих случаях возникает необходимость разработки методов, позволяющих вычислять определенные интегралы приближенно. Эти формулы для вычисления приближенных интегралов называются квадраторными.

**Формула Симпсона или парабол.**

Пусть требуется вычислить интеграл . Разобьем промежуток [a;b] на 2 равных отрезка, точками : ; .

Заменим подынтегральную функцию .

, тогда при , t=0; x=, t=2, тогда

Полученная формула называется формулой параболы или Симпсона.

**Геометрический смысл формулы Симпсона** состоит в следующем:

на промежутке [a;b] кривая y=f(x) заменяется параболой графиком интерполяционного многочлена. Для получения более точного результата, необходимо промежуток [a;b] разбить на четное число равных частей, точками

и применить к каждой паре смежных отрезков формулу парабол:

И применить к каждой паре смежных отрезков формулу Симпсона. Суммируя левые и правые части приближенных формул, получаем:

Абсолютная погрешность формулы Симпсона оценивается следующем образом: , где

.

**15.**

Точку n-мерного арифметического пространства с фиксированными точками будем обозначать

= + + …+. Пусть даны 2-е произвольные точки n-мерного арифметического пространства: = + + …+ . Определим расстояние между этими точками. Способ введения расстояния между точками n-мерного арифметического пространства называется метрикой пространства.

Расстояние между двумя точками вводится чаще следующим образом:

(x,y)=max(|x1-y1|; |x2-y2|;…;|xn-yn|)

(x,y)=|x1-y1|+|x2-y2|+…+|xn-yn|)

(x,y)=

n-мерное арифметическое пространство с соответствующей метрикой обозначается , либо , либо . Очевидно, что расстояние между точками в различных метриках различны. Совпадают эти расстояния только при n=1.

Понятие оператора: Пусть даны два пространства Х и У и множество Е включающееся в Х. Если каждой точке х принадлежащей Е соответствует точка у принадлежащая У, то говорят, что на множестве Е определен оператор, при этом х – прообраз а у – образ точки х. у=Ах, где А-символ оператора. Пусть дан оператор А, отображающий произвольную точку пространства Х в точку того же пространства х=Ах – операторное уравнение. Решить такое уравнение значит найти такое х\*, точку n-мерного арифметического пространства, образ которой совпадает с этой точкой. Возьмем какую-либо точку из множества определения оператора А. Назовем ее начальными приближением. Найдем образ этой точки А и назовем приближением. Образ первого приближения обозначим , продолжая процесс получаем последовательность точек ,… n-мерного арифметического пространства, которая называется последовательностью приближений или итерационной последовательностью.

Если существует положительно число 0<=α<=1 , такое что для любых двух точек х и у пространства имеет место соотношение

(Ах,Ау)<= α(x,y), то оператор А называется оператором сжатия, а число α – коэффициентом сжатия. Теорема о неподвижной точке:

Если оператор сжатия А переводит точки n-мерного метрического пространства в точки того же пространства, то существует точка х\*- не подвижная точка оператора, притом единственная. Итерационная последовательность построенная для данного оператора с любым начальным приближением сходится к х\*.

В качестве приближенного решения уравнения х=Ах можно выбрать k-ый член итерациооной последовательности при этом будет использована следующие оценки погрешности

(,) =

(,) = , где α-коэффициент сжатия.

**16. Принцип сжатых отобр-й. Реш-е нелин-х ур-й методом итераций.**

(1) Приведем ур-е (1) к виду (2), где - опер-р, опр-ный на нек-м замкнутом подмн-ве E одномерного пр-ва действ. чисел. Если зн-е ф-и также принадл-т этому мн-ву, то можно строить итерац-ю послед. с итерац-м приближ-м , т.е. ; ; … ; ; Если явл-ся опер-м сжатия, то итерац-я послед-ть сход-ся и ее предел явл-ся корнем ур-я (2) и (1), причем согл-но принципу сжатых отобр-й этот корень ед-й. Метод, основанный на рассм-и и исп-и итерац-й послед. наз-ся методом итераций или методом последовательных приближений. . Поскольку в одномерном пр-ве =, то формула оценки погрешности k-го приближения или . Если необх-мо выч-ть корень ур-я с точн. , то при постр-и итер-й послед-ти следует остановиться, если имеет место одно из нерав-в: 1) ; 2) . В этом случае за корень ур-я принимают k-е приближ-е.

Пр. ; , x=; ; 1) - определена и дифференцируема. 2) ; ; 3) ; ; Вып-ся все усл-я т-мы, т.е. итерац-я послед. сх=ся, причем реш-е ед-е.

; ; ;

**17. Принцип сжатых отобр-й. Теоремы о дост-х усл-х сход-ти итерационной послед-ти.**

Т-ма 1 (1-е достат-е усл-е): если ф-я определена и диф-ма на мн-ве , причем сущ-т такое, что , то ур-е имеет реш-е, притом ед-е. Это реш-е может быть получено методом послед-х прибл-й, причем за нач-е прибл-е можно взять любое число . Док-во: Ф-ю можно рассм-ть, как опер-р, опр-й в пр-ве с образом из того же пр-ва. Покажем, что явл-ся опер-м сжатия. Возьмем 2 произвольные т. этого пр-ва и восп-ся теор-й Лагранжа о конечных приращениях: Т.к. , то . Т.о. при усл-и , явл-ся оператором сжатия. В силу т-мы о сжатых отобр-х опер-р имеет неподв-ю т. , т.е. . Это т. ед-на. Последнее рав-во озн-т, что ур-е имеет ед-е реш-е, кот-е может быть пол-но, как предел итерац-й послед-ти.

Т-ма 2 (2-е достат-е усл-е): Если опр-на и диф-ма на [a;b], все ее знач-я также , сущ-т ; такое, что , то итерац-я послед-ть этой ф-и с любым нач-м прибл-м сх-ся и ее предел есть реш-е ур-я . Это ур-е на ед-но. Док-во: Отр-к - замкнутое подмн-во мн . (,). Если в этом подмн-ве ввести метрику так же, как и во мн , то отр-к можно рассм-ть, как метрическое пр-во. Дальнейший ход рассуждений такой же, как и в т-ме 1.

**18. Принцип сжатых отобр-й. Правило утроенного отрезка.**

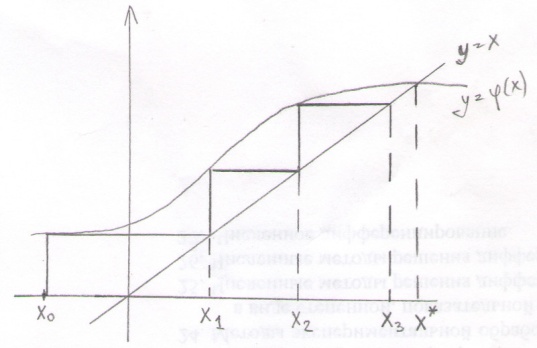
Применение 2го достаточного условия сходимости связано с проверкой того факта, что также должна . Будем исследовать ур-е на пром-ке , где - пром-к изоляции корня, h – длина пром-ка.

Т-ма 3: если 1) ур-е имеет ед-й корень на пром-ке дл. ; 2) опр. и диф-ма на ; 3) имеет место нер-во ; то итерац-я послед. с любым нач-м прибл-м сх-ся, и ее предел явл-ся корнем . Корень на ед-й и для k-го члена итерац-й послед-ти применимы стандартные оценки погрешности. Эта т-ма наз-ся правилом утроенного отрезка.

**19. Геометрическая интерпретация сход-ти итерац-ой послед-ти.**

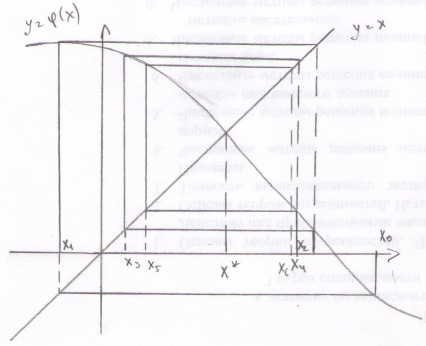
Док-но, что дост-ным усл-ем сход-ти итерац-й послед-ти к корню ур-я явл-ся вып-е след-го соотн-я: . Рассм. 2 сл-я: 1) возрастает; 2) убывает.

1) Пусть .



На оси абсцисс произвольно выберем т. и проведем прямую, парал-но OY до пересечения с графиком . Через т. пересечения проведем прямую, парал-но оси OX до пересечения с . . Проведем через прямую, парал-но оси OY до пересечения с . Через т. пересечения парал-но оси OX – до перес. с . Проекция этой т. на ось OX есть ; ; . И т.д. Продолжая алгоритм, получим ломаную, звенья кот. Попеременно параллельны то оси OX, то OY. Если выбрано левее т. пересечения графиков, то приходится подниматься по «лестнице» вверх, в противном случае опускаться вниз.

2) Пусть .



Ф-я убывает, но не очень быстро, т.к. . Воспользуемся тем же алгоритмом, что и в п. 1. В случае отрицательной производной ломаная, постр-я по алг-му 1 представляет собой спираль, кот. Закручивается по мере приближения к т. пересечения графиков.

Оценка погрешности в случае уб-й ф-и.

Рассм-я чертеж, убежд-ся, что в сл-е уб-й ф-и корень ур-я всегда нах-ся м-ду 2-мя соседними приближ-ми. Т-ма 4: если для ф-и выполнены усл-я по крайней мере одной из т-м 1, 2, 3, причем , то корень ур-я всегда заключен между любыми 2-мя сосед-ми членами итерац-й послед. Эта т-ма дает просте правило оценки погрешности k-го приближ-я: . Если необх-мо выч-ть корень ур-я с точн. , то вычисл-е следует прекратить, как только . Тогда .

**20. Применения принципа сжатых отображений для реш-я сист. лин. ур-й. Метод простой итерации. Метод Зейделя.**

Оператор в n-мерном метр-м пр-ве опр-ся лин-м соотн.

, где - действит. числа. Эти соотношения можно записать . При помощи этих соотн. произвольная т. n-мерного метрич-го пр-ва преобр. в т. того же пр-ва. След-но эти соотн-я задают оператор в n-мерном метрич. пр-ве. Выясним, в каком сл-е оп. A явл-ся оператором сжатия. Усл-я этого положения зависят от метрики пр-ва. Рассм-м эти усл-я для пр-ва с 1й метрикой. Пусть т. и т. - две произвольные т. n-мерного пр-ва . Образы этих т. соотв-но и . Т.е. и . Соотн-я, опр-е в n-мерном пр-ве: и . Из этих соотн. пол-м . Перейдя к модулю разности: . В кажд. слагаемом правой части множитель заменим наибольшими значениями этого модуля: . Число уже не зависит от k поэтому его можно вынести за знак суммы: . Сумма модулей при любом будет иметь опр-е знач-е. Выберем из всех этих знач-й наиб-е и об-м . Тогда , что только усилит нер-во. Это нер-во верно в том числе и для того, при кот. прин-т наиб. знач., но , поэтому расст. или . Послед. нер-во пок-т, что оп. A явл-ся оп-м сжатия в пр-ве с 1й метрикой, если вып-ся усл-е Можно пок-ть, что оп. A будет оп. сжатия в пр-вах со 2-й и 3-й метриками, если будет вып-но: и .

Реш-е системы n-лин-х ур-й с n-неизвестными методом послед-х приближений.

Пусть задано:

Представим в операторном виде :

Будем называть такую сист. – сист. нормального вида. Решить такую сист. значит найти неподвижные т. оп. A: Т-ма 5: если для сист. норм. вида вып-ся по крайней мре одно из усл-й:; или , то эта сист. имеет ед-е реш-е, кот. совп-т с пределом итрац-й послед., постр-й для оператора A с произвольным нач-м приближ-м Рассм. процесс постр-я итерац-й послед. Пусть произв. т. n-мерного метрич. пр-ва. Назовем ее нулевым прибл-м. Построим обрат. т. , где Каждое считается след. обр.: . Получив строим Причем , т.е. . На s-м шаге получим: ; и кажд. . Построение будем прод-ть до тех пор, пока не вып-ся одно из нер-в: или , где - заданная точность решения. Тогда в силу принципа сжатых отображений здесь раст. м-ду , ), рассм-ся в смысле выбранной метрики пр-ва. Методы, исп-е постр-е итерац-й послед. наз-т методами послед. приближений.

Рассм. на пр. метод простой итерации и метод Зейделя:

*; ; ; ; ; ; и т. д.* до требуемой точности. Это метод простой итерации. Метод Зейделя заключается в том, что при построении k-го приближения исп-ся не только k-1 прибл., но и k-е. Т-да: ; ; ; Исп-е метода Зейделя ускоряет сход-ть итерац-го пр-са. Главным преимуществом итерационных методов явл-ся то, что ошибка в вычисления не ведет к неправильному результату, а лишь может увеличить кол-во итераций.

**21.**

**Метод наименьших квадратов** — один из методов регрессионного анализа для оценки неизвестных величин по результатам измерений, содержащих случайные ошибки.

Метод наименьших квадратов применяется также для приближённого представления заданной функции другими (более простыми) функциями и часто оказывается полезным при обработке наблюдений.

Когда искомая величина может быть измерена непосредственно, как, например, длина отрезка или угол, то, для увеличения точности, измерение производится много раз, и за окончательный результат берут арифметическое среднее из всех отдельных измерений. Это правило арифметической середины основывается на соображениях теории вероятностей; легко показать, что сумма квадратов уклонений отдельных измерений от арифметической середины будет меньше, чем сумма квадратов уклонений отдельных измерений от какой бы то ни было другой величины. Само правило арифметической середины представляет, следовательно, простейший случай метода наименьших квадратов.

Пример:

Пусть надо решить систему уравнений

|  |  |
| --- | --- |
| \begin{cases}     a_{1}x + b_{1}y + c_{1}z + \dots + n_{1} = 0 \\     a_{2}x + b_{2}y + c_{2}z + \dots + n_{2} = 0 \\     a_{3}x + b_{3}y + c_{3}z + \dots + n_{3} = 0 \\     \dots\\ \end{cases} | (1) |

число которых более числа неизвестных *x*, *y*, {z}\dots

Чтобы решить их по способу наименьших квадратов, составляют новую систему уравнений, число которых равно числу неизвестных и которые затем решаются по обыкновенным правилам алгебры. Эти новые, или так называемые *нормальные* уравнения составляются по следующему правилу: умножают сперва все данные уравнения на коэффициенты у первой неизвестной *x* и, сложив почленно, получают первое нормальное уравнение, умножают все данные уравнения на коэффициенты у второй неизвестной *y* и, сложив почленно, получают второе нормальное уравнение и т. д. Если означить для краткости:

|  |  |
| --- | --- |
| \begin{cases}     {[}aa{]} = a_{1}a_{1} +  a_{2}a_{2} + \dots \\     {[}ab{]} = a_{1}b_{1} +  a_{2}b_{2} + \dots \\     {[}ac{]} = a_{1}c_{1} +  a_{2}c_{2} + \dots \\     \dots\\     {[}ba{]} = b_{1}a_{1} +  b_{2}a_{2} + \dots \\     {[}bb{]} = b_{1}b_{1} +  b_{2}b_{2} + \dots \\     {[}bc{]} = b_{1}c_{1} +  b_{2}c_{2} + \dots \\     \dots\\ \end{cases} |  |

то нормальные уравнения представятся в следующем простом виде:

|  |  |
| --- | --- |
| \begin{cases}     {[}aa{]}x + {[}ab{]}y + {[}ac{]}z + \dots + {[}an{]} = 0 \\     {[}ba{]}x + {[}bb{]}y + {[}bc{]}z + \dots + {[}bn{]} = 0 \\     {[}ca{]}x + {[}cb{]}y + {[}cc{]}z + \dots + {[}cn{]} = 0 \\     \dots\\ \end{cases} | (2) |

Легко заметить, что коэффициенты нормальных уравнений весьма легко составляются из коэффициентов данных, и притом коэффициент у первой неизвестной во втором уравнении равен коэффициенту у второй неизвестной в первом, коэффициент у первой неизвестной в третьем уравнении равен коэффициенту у третьей неизвестной в первом и т. д. Для пояснения сказанного ниже приведено решение пяти уравнений с двумя неизвестными:

|  |  |
| --- | --- |
| \begin{cases}     5{x} - 8{y} - 16 = 0 \\     8{x} - {y} - 32 = 0 \\     16{x} + 8{y} - 55 = 0 \\     9{x} + 7{y} - 32 = 0 \\      9{x} + 20{y} - 29 = 0  \end{cases} |  |

Составив значения [*aa*], [*ab*], получаем следующие нормальные уравнения:

|  |  |
| --- | --- |
| \begin{cases}     507{x} + 323{y} - 1765 = 0 \\     323{x} + 578{y} - 1084 = 0 \end{cases} | , |

откуда

*x* = 3,55;

*y* = − 0,109

Уравнения (1) представляют систему линейных уравнений, то есть уравнений, в которых все неизвестные входят в первой степени. В большинстве случаев уравнения, связывающие наблюдаемые и искомые величины, бывают высших степеней и даже трансцендентные, но это не изменяет сущности дела: предварительными изысканиями всегда можно найти величины искомых с таким приближением, что затем, разложив соответствующие функции в ряды и пренебрегая высшими степенями искомых поправок, можно привести любое уравнение к линейному.

**22.**

Нахождение приближающей функции в виде линейной



Запишем систему уравнений относительно  и 







**23. Квадратичная функция (квадратичная регрессия***).*

Пусть в результате измерений в процессе опыта получено табличное задание некоторой функции *f(х),* выражающей связь между двумя параметрами:

(1)

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| *х* | *x1* | *х2* | *…* | *xn* |
| *f(x)* | *y1* | *у2* | *…* | *yn* |

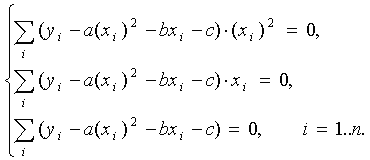
Будем искать приближающую функцию в виде квадратного трехчлена:

1317.gif (1286 bytes)                    (9)

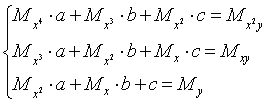
Находим частные производные:

1318.gif (1212 bytes)

Составим систему вида :

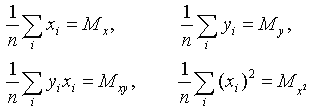


После несложных преобразований получается система трех линейных уравнений с тремя неизвестными *a, b, c*. Коэффициенты системы, так же как и в случае линейной функции, выражаются только через известные данные из таблицы (1):

(10)

Здесь использованы обозначения:

1321.gif (1885 bytes)



Решение системы (10) дает значение параметров *a, b* и *с* для приближающей функции (9).

Квадратичная регрессия применяется, если все выражения вида *у2 -2y1 +y0 , y3 -2 y2 + y1 , y4 -2 y3 + y2* и т.д. мало отличаются друг от друга.

**24.**

***Степенная функция*** *(геометрическая регрессия).*Найдем теперь приближающую функция в виде:

1322.gif (1147 bytes)                            (11)

Предполагая, что в исходной таблице ( 1) значения аргумента и значения функции положительны, прологарифмируем равенство ( 11) при условии *а>0*:

1323.gif (1130 bytes)                          (12)

Так как функция *F* является приближающей для функции *f*, функция *lnF* будет приближающей для функции *lnf*. Введем новую переменную *u=lnx*; тогда, как следует из (12), *lnF* будет функцией от *u*: *Ф(u)*.

**Обозначим**

1324.gif (1061 bytes)                                 (13)

Теперь равенство (12) принимает вид:

1325.gif (1169 bytes)                          (14)

т.е. задача свелась к отысканию приближающей функции в виде линейной. Практически для нахождения искомой приближающей функции в виде степенной (при сделанных выше предположениях) необходимо проделать следующее:

1. по данной таблице ( 1 ) составить новую таблицу, прологарифмировав значения *x* и *y* в исходной таблице;

2. по новой таблице найти параметры *А* и *В* приближающей функции вида (14);

3. использовав обозначения (13), найти значения параметров *a* и *m* и подставить их в выражение (11).

Необходимым условием для выбора степенной функции в качестве искомой эмпирической формулы является соотношение:

1326.gif (1498 bytes)

***Показательная функция.*** Пусть исходная таблица (1) такова, что приближающую функцию целесообразно искать в виде показательной функции:

1327.gif (1256 bytes)                         (15)

Прологарифмируем равенство (15):

1328.gif (1107 bytes)                             (16)

Приняв обозначения (13), перепишем (16) в виде:

1329.gif (1067 bytes)                                 (17)

Таким образом, для нахождения приближающей функции в виде (15) нужно прологарифмировать значения функции в исходной таблице (1) и, рассматривая их совместно с исходными значениями аргумента, построить для новой таблицы приближающую функцию вида ( 17). Вслед за этим в соответствии с обозначениями ( 13) остается получить значения искомых параметров *a* и *b* и подставить их в формулу (15).

Необходимым условием для выбора показательной функции в качестве искомой эмпирической формулы является соотношение:

1330.gif (1486 bytes)***.***

***Дробно-линейная функция****.* Будем искать приближающую функцию в виде:

1331.gif (1240 bytes)                                 (18)

Равенство (18) перепишем следующим образом:

1332.gif (1246 bytes)

Из последнего равенства следует, что для нахождения значений параметров *a* и *b* по заданной таблице (1) нужно составить новую таблицу, у которой значения аргумента оставить прежними, а значения функции заменить обратными числами, после чего для полученной таблицы найти приближающую функцию вида *ax+b*. Найденные значения параметров *a* и *b* подставить в формулу ( 18).

Необходимым условием для выбора дробно-линейной функции в качестве искомой эмпирической формулы является соотношение [38]:

1333.gif (1629 bytes).

***Логарифмическая функция****.* Пусть приближающая функция имеет вид:

1334.gif (1215 bytes)                                      (19)

Легко видеть, что для перехода к линейной функции достаточно сделать подстановку *lnx=u*. Отсюда следует, что для нахождения значений *a* и *b* нужно прологарифмировать значения аргумента в исходной таблице ( 1 ) и, рассматривая полученные значения в совокупности с исходными значениями функции, найти для полученной таким образом новой таблицы приближающую функцию в виде линейной. Коэффициенты *a* и *b* найденной функции подставить в формулу (19).

Необходимым условием для выбора логарифмической функции в качестве искомой эмпирической формулы является соотношение:

1335.gif (1396 bytes).

***Гипербола****.* Если точечный график, построенный по таблице (1), дает ветвь гиперболы, приближающую функцию можно искать в виде:

1336.gif (1220 bytes)                                   (20)

Для перехода к линейной функции сделаем подстановку 1337.gif (986 bytes).

1338.gif (1165 bytes)                                  (21)

Практически перед нахождением прибллижающей функции вида ( 20) значения аргумента в исходой таблице ( 1 ) следует заменить обратными числами и найти для новой таблицы приближающую функцию в виде линейной вида ( 21). Полученные значения параметров *а* и *b* подставить в формулу (20).

Необходимым условием для выбора уравнения гиперболы в качестве искомой эмпирической формулы является соотношение [38]:

1339.gif (1494 bytes).

***Дробно-рациональная функция.*** Пусть приближающая функция находится в виде:

1340.gif (1252 bytes)                                           (22)

Очевидно, что

1341.gif (1257 bytes),

так что задача сводится к случаю, рассмотренному в предыдущем пункте. Действительно, если в исходной таблице заменить значения *х* и *у* их обратными величинами по формулам 1342.gif (951 bytes)и 1344.gif (961 bytes)и искать для новой таблицы приближающую функцию вида *u=bz+a*, то найденные значения *а* и *b* будут искомыми для формулы (22).

Необходимым условием для выбора дробно-рациональной функции в качестве искомой эмпирической формулы является соотношение [38]:

1343.gif (1583 bytes)

**25.**

**Численные методы решиния диф уравнений.**

Простейшим диф уравнением первого порядка явл уравнение основная задача связанная с этим уравнением известная как задача Коши. Найти решение уравнения (1) в виде ф-ции у(х) которое удовлетворяет начальному условию . Геометрически это значит что нужно найти интегральную кривую у=у(х) проходящую через заданную точку . Существует единственное решение уравнения (1) обеспеченное теоремой Пикара.

Теорема Пикара.

Если функция f определена и непрерывна в области G заданная неравенствами и удовлетворяет в этой области условию Либшеца по у . Причем функция удовлетворяет условию то на некотором отрезке , где h – положительное число. Существует и причем только одно решение у=у(х) уравнения (1) удовлетворяющее началоному условию . Здесь М – const и называется постоянной Липшеца которая зависит от а и в . Если функция f(x,y) имеет в G ограниченную производную по у , то при можно за М принять

В классическом анализе разработаны достаточно мощные способы решения диф уравнений.

Между тем при решении практических задач эти методы являются либо беспомощными либо неоправдывают затрат на их решение. По этой причине разработаны приближённые методы решения диф уравнений. Весьма условно методы разделяют на з группы :

1. Аналитические : применение которых позволяет получить приближённые решения диф уравнений в виде аналитической функции ;
2. Графические : дают приближённые решения в виде графиков ;
3. Численные методы : эти методы дают искомую функцию в виде таблицы.

Рассмотрим приближённые методы решения диф уравнения первого порядка. Диф уравнения более высокого порядка сводятся с системам уравнений первого порядка.

К аналитическим методам приближённые решения обыкновенных диф уравнений относится метод Пикара . Метод Пикара возник в связи с доказательством теоремы о существовании и единственности решения уравнении (1). Он является по сути одним из применений принципа сжимающих отображений.

**Метод Эйлера** иначе называют методом ломаных. В его основе лежит идея графического построения решения дифференциального уравнения.

Однако этот метод даёт одновременно и способ нахождения искомой функции в численной или табличной форме.

Пусть дано уравнение с начальными условиями выбрав достаточно малый шаг h построим систему равно отстоящих точек

Вместо искомой интегральной кривой на промежутке рассмотрим отрезок касательной к этой кривой в точке . , при , получим , т.е. , откуда видно, что приращение функции равняется .

Аналогично проводя касательную в точке к некоторой интегральной кривой семейство интегральных кривых получаем . При , т.е.

Таким образом получение табличных значений искомой функцией по методу Эйлера заключается в циклическом применении 2-ух формул:

Метод Эйлера обладает малой точностью :

1. По причине того что 2-ая касательная проводится уже фактически к другой кривой и очевидно что погрешность возрастает на каждом шаге поэтому на практике используется наиболее приемлемый способ оценки погрешности с помощью 2-ого пересчёта, т.е. строится таблица и график при шаге h , а затем пересчитывается с шагом h/2. Совпадение 2-ух знаков после запятой в расчетах считается приемлемым результатом и позволяет считать эти знаки верными . недостаточная точность метода Эйлера побуждает к использованию его модификаций, одна из модификаций называется методом Эйлера-Каши

**26.**

**Численные методы решиния диф уравнений.**

Простейшим диф уравнением первого порядка явл уравнение основная задача связанная с этим уравнением известная как задача Коши. Найти решение уравнения (1) в виде ф-ции у(х) которое удовлетворяет начальному условию . Геометрически это значит что нужно найти интегральную кривую у=у(х) проходящую через заданную точку . Существует единственное решение уравнения (1) обеспеченное теоремой Пикара.

Теорема Пикара.

Если функция f определена и непрерывна в области G заданная неравенствами и удовлетворяет в этой области условию Либшеца по у . Причем функция удовлетворяет условию то на некотором отрезке , где h – положительное число. Существует и причем только одно решение у=у(х) уравнения (1) удовлетворяющее началоному условию . Здесь М – const и называется постоянной Липшеца которая зависит от а и в . Если функция f(x,y) имеет в G ограниченную производную по у , то при можно за М принять

В классическом анализе разработаны достаточно мощные способы решения диф уравнений.

Между тем при решении практических задач эти методы являются либо беспомощными либо неоправдывают затрат на их решение. По этой причине разработаны приближённые методы решения диф уравнений. Весьма условно методы разделяют на з группы :

1. Аналитические : применение которых позволяет получить приближённые решения диф уравнений в виде аналитической функции ;
2. Графические : дают приближённые решения в виде графиков ;
3. Численные методы : эти методы дают искомую функцию в виде таблицы.

Рассмотрим приближённые методы решения диф уравнения первого порядка. Диф уравнения более высокого порядка сводятся с системам уравнений первого порядка.

К аналитическим методам приближённые решения обыкновенных диф уравнений относится метод Пикара . Метод Пикара возник в связи с доказательством теоремы о существовании и единственности решения уравнении (1). Он является по сути одним из применений принципа сжимающих отображений.

**Метод Рунге-Кутта**

Метод Эйлера и его модификации относят к семейству Рунге-Кутта. Это семейство в зависимости от параметров параметров исследования большинство приближённых методовобыкновенных диф уравнений. Зафиксируем некоторые числа

Зафиксируем некоторые числа.

Последовательно вычисляем

…………………………………..

и полагаем что , где z(h)- последующее значение у.

Рассмотрим вопрос о выборе параметров . Обозначим ф(h)=y(x+h)-z(h). Предположим что

При любых ф-ях f(x,y), а для некоторого f(x,y).

По формуле Тейлора справедливо равенство , где

Величина ф(h) называется погрешностью метода на шаге , а S называется порядком погрешности.

При ф(h)=y(x+h)-y(x)-\*h\*f(x,y).

По предложению ф(0)=0

ф’(0)=(y’(x+h)-\*f(x,y))=f(x,y)(1-)

Ясно что равенство ф’(0)=0 выполняется для любых ф-ций f(x,y) в том случае .

В этом случае из формулы (\*) получаем метод Эйлера.

Погрешность метода

из (\*\*), аналогично выполняется подбор параметров для q=2 и тд. На практике наиболее часто используется метод Рунга-Кутта с q=4 соответствующие формулы будут выглядеть следующим образом

В этом случае , тогда .

Отметим что в этом случае погрешность на шаге пропорциональна 5 степени шага поэтому вычисления выполненные по этому методу считаются практически точными.

**27.**

Если на практике возникает ситуация что производную аналитически заданной функции по причине её сложности. Искать затруднительно либо выражение для производной приобретает слишком не удобную для применения форму используют приближенное или численное дифференцирование. Этот метод тем более необходим если исходная функция задана таблично .

Пусть у=f(x) функция для которой надо найти производную в данной точке отрезка [a,b] , а иттераполиционный многочлен для функции f(x) на [a,b] , заменяя получим что значение производной функции . Аналогично можно получить и производные высших порядков для функции f(x). Если погрешность интерполирования равна , то погрешность производной оценивается как разность .

Заметим что задачи численного дифференцирования в общем случае является некорректной так как погрешность производной может существенно превышать погрешность самой интерполяции т е близость значений совсем не гарантирует близости значений производных.